На правах рукописи

ГАЛЬЦЕВ Олег Владимирович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ КАК УСРЕДНЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Белгород – 2013

Работа выполнена на кафедре информатики и вычислительной техники Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

Научный руководитель: **Мейрманов Анварбек Мукатович**, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Данилов Владимир Григорьевич** доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики НИУ «Высшая школа экономики», г. Москва

Чеканов Николай Александрович доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационно-компьютерных технологий в деятельности органов внутренних дел БелЮИ МВД России, г. Белгород

Ведущая организация: Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука Сибирского Отделения Российской Академии Наук, г. Новосибирск

Защита диссертации состоится 11 октября 2013 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.015.04 при ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет», адрес: 308015 г. Белгород, ул. Победы, 85.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет», по адресу: 308015 г. Белгород, ул. Победы, 85.

Автореферат разослан « » 2013 года

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.015.04 Беленко В. А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Проблемы моделирования физических процессов различной природы в различных средах возникают в механике жидкости и газа, в механике твердого тела, электродинамике и многих других областях. При этом общей проблемой является соотношение микро-и макроскопических подходов их описания. Часто требуется построить модель среды, локальные свойства которой резко меняются, поэтому удобнее перейти от микроскопического ее описания к макроскопическому, то есть рассматривать усредненные характеристики такой среды. Во многих случаях рассматриваемые физические процессы в сильно неоднородных средах описываются уравнениями с частными производными, причем сильная неоднородность этих сред приводит к дифференциальным уравнениям с резко изменяющимися коэффициентами. Такие задачи возникают в теории упругости и гидродинамике, в теории гетерогенных сред и композитных материалов, теории фильтрации и других задачах физики и механики. Непосредственное численное решение таких задач, как правило, затруднительно даже на современных ЭВМ. Поэтому возникает вопрос о построении моделей для сильно неоднородных сред, приводящих к более простым дифференциальным уравнениям, которые называются усредненными. Часто такие дифференциальные уравнения имеют постоянные коэффициенты. Усредненные уравнения позволяют определить с большой точностью эффективные характеристики первоначальной среды. Это условие обеспечивается основным требованием, которому должны удовлетворять усредненные уравнения – близость решений соответствующих краевых задач для исходных и усредненных уравнений. Математическое описание сильно неоднородных сред часто основано на предположении о наличии у таких сред какой-либо упорядоченной микроструктуры (например, периодической, квазипериодической, случайной однородной и др.).

В настоящей диссертации выводятся усредненные уравнения задачи о нахождении поверхности контактного разрыва при движении двух несжимаемых вязких жидкостей в порах скелета грунта (с периодической структурой) в двух различных случаях, когда скелет является абсолютно твердым телом, и когда он является упругим телом. Разработанные алгоритмы и программа для ЭВМ позволили получить результаты, близкие к решению исходной микроскопической задачи, что указывает и на корректность выведенных усредненных моделей и на адекватность компьютерных вычислений.

Данная тематика также включена:
пункт 6 - рациональное природопользование - перечня **Приоритетных направлений науки РФ**;
пункт 8 - технологии атомной энергетики, ядерного топливного цикла, безопасного обращения с радиоактивными отходами и отработавшим ядерным топливом,
пункт 34 - технологии экологически безопасной разработки месторождений и добычи полезных ископаемых - перечня **Критических Технологий РФ.**

Все это показывает, что задачи, рассматриваемые в диссертации, весьма актуальны.

Целью работы является совершенствование существующих математических моделей и методов исследования неоднородных жидкостей в пористых средах.

Для достижения поставленной цели были сформулированы и решены следующие задачи.

1. Получить макроскопические математические модели движения вязких несжимаемых жидкостей различной вязкости в пористых упругих средах с помощью метода двухмасштабного асимптотического разложения.

2. Разработать новые вычислительные алгоритмы решения задач, моделирующих процесс движения вязких несжимаемых жидкостей в поровом пространстве различной геометрии, как на микроскопическом, так и на макроскопическом уровнях.

3. Вывести разностные схемы и составить программу для решения задач, моделирующих процесс движения вязких несжимаемых жидкостей в пористой упругой среде.

4. Решить начально-краевые задачи, моделирующие процесс диффузионного движения двух несжимаемых жидкостей в пористой упругой среде на микроскопическом уровне.

Объект исследований: математические модели движения неоднородных жидкостей в пористых средах и методы решения соответствующих начально-краевых задач.

Предмет исследований: математические модели движение двух несмешивающихся несжимаемых вязких жидкостей в пористом скелете и численные методы их решения.

Методы исследований. Основными методами исследования являются классические методы математической физики, функционального анализа и методы вычислений теории уравнений с частными производными, разностные методы. В частности, для построения приближенных решений дифференциальных уравнений использовались метод Галеркина и теорема Шаудера о неподвижной точке, для доказательства сходимости приближенных решений дифференциальных уравнений к точному решению – метод априорных оценок, методы компактности. При выводе усредненных уравнений использовался метод двухмасштабного асимптотического разложения. В работе использованы численные методы анализа и методология объектно-ориентированного проектирования программных систем. Численное интегрирование проводилось методом прямоугольников, а для построения решения систем уравнений в частных производных использовались такие разностные методы, как метод объема жидкости и метод крупных частиц.

Научную новизну работы составляет следующее.

1. Макроскопические модели движения вязких несжимаемых жидкостей различной вязкости в поровом пространстве, полученные методом двухмасштабного асимптотического разложения.

2. Алгоритм численного решения задачи фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в абсолютно твердом скелете.

3. Алгоритм численного решения задач совместного движения жидкостей и упругого скелета.

4. Устойчивые разностные схемы для численного решения как микроскопических, так и макроскопических уравнений движения вязких несжимаемых жидкостей в поровом пространстве.

5. Доказательство разрешимости диффузионных моделей фильтрации жидкостей в поровом пространстве.

Практическая значимость работы определяется тем, что использование полученных в ней результатов позволит правильно выбирать соответствующие макроскопические математические модели движения неоднородных жидкостей в упругих пористых средах и численные методы их решения.

Область исследования. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по следующим областям исследований:

п.1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений.

п.2. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.

п.4. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Положения выносимые на защиту.

1. Микроскопические математические модели движения вязких несжимаемых жидкостей различной вязкости в поровом пространстве.

2. Алгоритм численного решения задач совместного движения вязких несжимаемых жидкостей на микроскопическом уровне.

3. Макроскопические математические модели движения вязких несжимаемых жидкостей различной вязкости в поровом пространстве.

4. Алгоритм численного решения задач совместного движения вязких несжимаемых жидкостей на макроскопическом уровне.

5. Комплекс проблемно-ориентированных программ моделирования процесса вязкоупругой фильтрации.

Достоверность выводов обусловлена корректностью математических преобразований при выводе усредненных уравнений совместного движения жидкости и упругого тела, подтверждается совпадением результатов вычислительных экспериментов и отсутствием противоречий с уже существующими результатами численного моделирования двухфазных течений.

Личный вклад соискателя. Все изложенные в диссертации результаты исследований получены либо соискателем лично, либо при его непосредственном участии.

Апробация результатов диссертационного исследования. Наиболее значимые результаты диссертации докладывались на VIII школе молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики», которая проводилась в рамках Российско-Болгарского симпозиума, 2010, г. Нальчик; Воронежской весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач», 2010, г. Воронеж; международной конференции, посвященной 110-ой годовщине со дня рождения И.Г. Петровского, 2011, г. Москва; международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, 2010, г. Суздаль; всероссийской конференции «Нелинейные волны: теория и новые приложения», 2011, г. Новосибирск; международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел», 2011, г. Белгород.

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано 13 печатных работ (из них 7 в журналах из списка ВАК РФ), а также получено 1 Свидетельство Роспатента РФ о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из четырех глав, разбитых на параграфы, списка литературы и приложений. Объем диссертации составляет 160 страниц, библиография – 103 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** изложены актуальность темы, цель работы, методы исследования, научная новизна, публикации по теме диссертации и личный вклад автора в совместные работы, апробация работы, значимость, структура и содержание работы.

Глава 1. Состояние вопроса и вспомогательные утверждения. В данной главе содержатся предварительные теоретические сведения и приведен краткий обзор используемой литературы.

Уравнения пороупругости, полученные К. фон Терцаги[1] и М. Био[2] долгое время являлись общепринятыми и служили основой для решения практических задач пороупругости. Эти уравнения учитывают перемещение не только жидкости в порах, но и твердого скелета. Предлагаемые К. фон Терцаги и М. Био модели называют феноменологическими: в них постулируются свойства смеси твердой и жидкой компонент. Позже, ряд авторов (Р. Барридж и Дж. Келлер[3], Э. Санчес-Паленсия[4]) предложили вывод уравнений пороупругости на основе основных законов механики

[1] *Terzaghi K.* Die Berechnung der Durchlassigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungsercheinungen [Текст]// Sitzung berichte. Akademie der Wissenschaften, Wien Mathematiesch-Naturwissenschaftliche Klasse, - 1923. - V. 132. - № IIa. - pp. 104-124.

[2] *Biot M.* Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid [Текст]// Journal of Applied Physics. - 1955. - V. 26. - pp.182-185.

сплошных сред и методов усреднения. Это было вполне естественно, сначала описать совместное движение упругого скелета и жидкости в порах на микроскопическом уровне, используя классические законы механики сплошных сред, а затем найти соответствующие аппроксимирующие модели с помощью теории усреднения (усредненные уравнения).

Так, совместное движение в области описывалось ими базовой математической моделью, которая содержала динамические уравнения Стокса для жидкости в поровом пространстве, динамические уравнения Ламе для твердой компоненты и условие непрерывности нормальных напряжений на общей границе «поровое пространство - твердый скелет». Все уравнения понимаются в смысле теории распределения (как соответствующие интегральные тождества).

Эта задача является сильно нелинейной и содержит еще одну неизвестную величину – общую границу «поровое пространство - твердый скелет». Главным постулатом здесь является то, что твердая и жидкая компоненты не смешиваются. Таким образом, неизвестная (свободная) граница является поверхностью **контактного разрыва**, которая определяется из задачи Коши для характеристической функции порового пространства.

Для упрощения данной системы естественной была идея линеаризации исходной системы.

Различные частные случаи линеаризации рассматривались многими авторами: Дж. Бьюкенен - Р. Гильберт - Ж. Лин, М. Бакингем, Р. Барридж - Дж. Келлер, Т. Клопиу - Ж. Ферри - Р. Гилберт - А. Микелич - Л. Паоли, Т. Леви, Г. Нгуетсенг, Ж. Санчес-Хьюберт, Э. Санчес-Паленсия.

Для описания совместного движения двух неоднородных жидкостей в упругом скелете динамическая система уравнений дополняется уравнением переноса для плотности $\rho^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t)$ смеси жидкой и твердой компонент.

Разработанный алгоритм численного решения такой задачи основан на методе SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations[5]) в переменных скорость-давление[6] (физические переменные). Постановка

[3] *Burridge R., Keller J. B.* Poroelasticity equations derived from microstructure [Текст]// J. Acoust. Soc. Am. - 1981. - V. 70.- № 4. - pp. 1140– 1146.

[4] *Sanchez-Palencia E.* Non-Homogeneous Media and Vibration Theory [Текст]. - Berlin: Springer. Lecture Notes in Physics. - V. 129, 1980.

[5] *Shterev K. S., Stefan K. Stefanov, Emanouil I.* A parallel algorithm with improved performance of Finite Volume Method (SIMPLE-TS) LSSC-11 [Текст]. – 2011.

задачи в физических переменных позволяет сравнительно легко распространить методы расчета плоских течений на трехмерный случай, а сам подход к решению помогает справиться с тем, что уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости содержит лишь составляющие скорости и поэтому нет прямой связи с давлением.

Глава 2. Микро-и макроскопические математические модели фильтрации неоднородных жидкостей.

В главе рассматриваются четыре математические модели (**ММ1** – **ММ4**, **УММ1** – **УММ4**), описывающие движение жидкостей в поровом пространстве как на микроскопическом, так и на макроскопическом уровнях.

В области Ω математическая модель **ММ1** совместного движения двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей на микроскопическом уровне в упругом скелете имеет вид

$$\nabla\cdot\big(\chi^\varepsilon\mu_0\mathbb{D}(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t})+(1-\chi^\varepsilon)\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon)- p^\varepsilon\mathbb{I}\big)+\rho^\varepsilon\boldsymbol{F}=0,\boldsymbol{x}\in\Omega,t>0,\quad(1)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{w}^\varepsilon=0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega,t>0,\quad(2)$$

$$\frac{\partial\rho^\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\cdot\nabla\rho^\varepsilon=0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega,t>0,\quad(3)$$

$$\chi^\varepsilon\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},0)=0\,\text{при}\,\boldsymbol{x}\in\Omega,\quad(4)$$

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)=0\,\text{при}\,\boldsymbol{x}\in S=\partial\Omega,\ t>0,\quad(5)$$

$$\int_\Omega p^\varepsilon\,dx=0,\ t>0,\quad(6)$$

$$\chi^\varepsilon\rho^\varepsilon(\boldsymbol{x},0)=\rho_0(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\Omega,\quad(7)$$

где $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)=(w_1^\varepsilon(\boldsymbol{x},t),w_2^\varepsilon(\boldsymbol{x},t))$ - вектор перемещения сплошной среды, $p^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$ - давление в сплошной среде, $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})$— симметрическая часть градиента вектора $\boldsymbol{w}$ (тензор напряжений), $\mathbb{I}$—единичная матрица, $\chi^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ – характеристическая функция порового пространства,

$$\rho^{\varepsilon}=\chi^{\varepsilon}\rho_f+(1-\chi^\varepsilon)\rho_s,$$

μ_0 – безразмерная вязкость жидкости, λ_0 – безразмерная постоянная Ламэ.

[6] *Пейре Р., Тейлор Т.Д.* Вычислительные методы в задачах механики жидкости [Текст]. – Л.: Гидрометеоиздат, 1986. – 352с.

В **Теореме 2.1.2** доказывается, что предельные функции являются решением усредненной системы **УММ1**, которая в области Ω_T состоит из уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0, \tag{8}$$

усредненных уравнений момента импульса

$$\nabla \cdot \widetilde{\mathbb{P}} + \rho \boldsymbol{F} = 0, \tag{9}$$

где

$$\widetilde{\mathbb{P}} = \mathfrak{N}_1 : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}) + \mathfrak{N}_2 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \int_0^t \mathfrak{N}_3(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau)) d\tau - p\, \mathbb{I},$$

и усредненного уравнения переноса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} \cdot \nabla \rho = 0, \;\; \rho = m\rho_f + (1-m)\rho_s. \tag{10}$$

Система уравнений (8)–(10), дополненная граничными и начальными условиями, есть не что иное, как усредненная модель Маскета **УММ1** совместного движения жидкости и порового пространства.

Математическая модель **ММ2** движения жидкости в абсолютно твердом скелете на микроскопическом уровне в области Ω при $t > 0$ имеет вид

$$\nabla \cdot (\alpha_\mu \mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}^\varepsilon) - p^\varepsilon \mathbb{I}) + \rho_f^\varepsilon \boldsymbol{F} = 0, \, \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon, t \in (0, T), \tag{11}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}^\varepsilon = 0, \, \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon, t \in (0, T) \tag{12}$$

$$\frac{\partial \rho_f^\varepsilon}{\partial t} + \boldsymbol{v}^\varepsilon \cdot \nabla \rho_f^\varepsilon = 0, \, \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon, t \in (0, T), \tag{13}$$

$$\rho_f^\varepsilon(\boldsymbol{x}, 0) = \rho_f^{(0)}(\boldsymbol{x}), \, \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon. \tag{14}$$

На общей границе «твердый скелет – поровое пространство» выполняются условия

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S \cup \Gamma^\varepsilon, \; t > 0, \tag{15}$$

где $S = \partial\Omega$.

Система (11)–(15) дополняется условием нормировки

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} p^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) dx = 0, \, t > 0. \tag{16}$$

ММ2 – частный случай модели **ММ1**, где перемещения упругого скелета не учитываются. Усредненная математическая модель **УММ2** в области Ω при $t \in (0, T)$ состоит из уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \tag{17}$$

закона Дарси

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\mu_1}\mathbb{B}^{(f)}\left(-\frac{1}{m}\nabla p + \rho_f \boldsymbol{F}\right) \tag{18}$$

и усредненного уравнения переноса

$$m\,\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho = 0, \tag{19}$$

где $\mathbb{B}^{(f)}$ – симметричная положительно определенная матрица.

Математическая модель **ММ3** описывает диффузионное распространение жидкостей в грунте. В области Ω рассматривается следующая система дифференциальных уравнений

$$\nabla \cdot \big(\chi^{\varepsilon}\mu_0 \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}) + (1-\chi^{\varepsilon})\lambda_0 \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^{\varepsilon}) - p^{\varepsilon}\mathbb{I}\big) + \rho^{\varepsilon}\boldsymbol{F} = 0, \quad t > 0 \tag{20}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w}^{\varepsilon} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad t > 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial \rho^{\varepsilon}}{\partial t} = \nabla \cdot \left(D_0 \nabla \rho^{\varepsilon} - \rho^{\varepsilon}\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_f^{\varepsilon}, \quad t > 0 \tag{22}$$

дополненная следующими начальными и граничными условиями

$$\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \quad \text{при} \;\; \boldsymbol{x} \in S = \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{23}$$

$$D_0 \frac{\partial \rho^{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{n}} - \rho^{\varepsilon}\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \;\; \text{при} \;\; \boldsymbol{x} \in \Gamma^{\varepsilon}, \; t > 0, \tag{24}$$

$$\chi^{\varepsilon}\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, 0) = 0 \quad \text{при} \;\; \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{25}$$

$$\rho^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, 0) = \rho_0(\boldsymbol{x}), \text{ при } \boldsymbol{x} \in \Omega^{\varepsilon}_f, \tag{26}$$

и условием нормировки

$$\int_{\Omega} p^{\varepsilon}\, d\boldsymbol{x} = 0, \quad t > 0, \tag{27}$$

где D_0 — коэффициент диффузии.

В **Теореме 2.2.1** доказывается существование хотя бы одного обобщенного решения задачи (20) – (26).

Усредненная математическая модель **УММ3** в области Ω_T описывается следующей системой уравнений, которая состоит из усредненного уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0, \tag{28}$$

усредненных уравнений баланса

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbb{P}} + \rho \boldsymbol{F} = 0, \tag{29}$$

где

$$\widehat{\mathbb{P}} = -p\,\mathbb{I} + \mathfrak{N}_1 : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}) + \mathfrak{N}_2 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \int_0^t \mathfrak{N}_3(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau))d\tau,$$

и усредненного конвективного уравнения диффузии

$$m\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (D_0 \mathbb{B}^{(\rho)} \nabla \rho) - \nabla \cdot \left(\rho \mathbb{B}^{(\rho)} \boldsymbol{v}\right), \tag{30}$$

где $\mathbb{B}^{(\rho)}$ – симметричная положительно определенная матрица.

В области Ω математическая модель **ММ4** движения жидкости и упругого несжимаемого скелета на микроскопическом уровне имеет вид

$$\nabla \cdot \left(\chi^\varepsilon \mu_0 \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}) + (1-\chi^\varepsilon)\lambda_0 \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^\varepsilon) - p^\varepsilon \mathbb{I}\right) + \rho^\varepsilon \boldsymbol{F} = 0, \tag{31}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w}^\varepsilon = 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega,\ t > 0, \tag{32}$$

$$\frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \nabla \rho^\varepsilon = D_0 \Delta \rho^\varepsilon,\ \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon,\ t > 0. \tag{33}$$

Система (31)–(33) дополняется начальными условиями

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, 0) = 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon, \tag{34}$$

$$\rho^\varepsilon(\boldsymbol{x}, 0) = \rho_0(\boldsymbol{x}) \text{ при } \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon, \tag{35}$$

граничными условиями

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) = 0,\ \boldsymbol{x} \in S = \partial\Omega, \tag{36}$$

$$\frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \ \text{ при } \ \boldsymbol{x} \in S,\ t > 0 \tag{37}$$

и условием нормировки

$$\int_\Omega p^\varepsilon\, dx = 0. \tag{38}$$

В **Теореме 2.3.1** доказывается существование хотя бы одного обобщенного решения задачи (31) – (35).

Предельные функции являются решением усредненной системы уравнений в области Ω_T, состоящей из уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0, \tag{39}$$

усредненных уравнений баланса

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbb{P}} + \rho \boldsymbol{F} = 0, \tag{40}$$

где

$$\widehat{\mathbb{P}} = -p\,\mathbb{I} + \mathfrak{N}_1 : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}) + \mathfrak{N}_2 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \int_0^t \mathfrak{N}_3(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau))d\tau,$$

и усредненного конвективного уравнения диффузии

$$m\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbb{B}^{(\rho)}\boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho = \nabla \cdot (D_0 \mathbb{B}^{(\rho)} \nabla \rho). \tag{41}$$

Глава 3. Разработка алгоритмов численного решения математических моделей фильтрации неоднородных жидкостей для различных структур порового пространства.

Глава посвящена разработке алгоритмов численного решения моделей **ММ1**, **ММ2**, **УММ1**, **УММ3** и **УММ4**, когда более тяжелая жидкость, находящаяся сверху более легкой жидкости, вытесняет ее вверх под действием силы тяжести.

Основные сложности при численном решении системы уравнений Стокса связаны с нахождением поля давления. А наличие стратификации дополнительно требует расчета поля плотности. В разработанном алгоритме в некоторый момент времени $t_n = n\tau$, где τ – величина шага по времени, n – число шагов, известно поле скоростей $\boldsymbol{v} = \partial \boldsymbol{w}/\partial t$, давление p и плотность ρ. Тогда чтобы найти неизвестные функции, процесс вычисления можно представить в следующем виде:

Этап 1. Решается система уравнений Ламэ с граничными и начальными условиями для перемещения $\boldsymbol{w}_s$. На первом шаге по времени находим промежуточное значение $\tilde{\boldsymbol{w}}_s$. В данном случае условие несжимаемости не удовлетворяется, поэтому в первую очередь будем искать поправки к полю перемещения и давления, затем окончательные значения перемещения и давления корректируем.

Этап 2. Используя найденные значения перемещения и давления, находим нормальные напряжения на границе «поровое пространство – твердый скелет».

Этап 3. Так как на общей границе между упругим скелетом и жидкостью выполняется условие непрерывности перемещений и нормальных напряжений, то решаем систему уравнений Стокса в поровом пространстве, учитывая граничное условие на общей границе, затем используя найденные значения перемещения и давления, находим нормальные напряжения на границе «поровое пространство – твердый скелет».

Этап 4. Используя уже известное значение скорости жидкости, находим значение плотности на следующем временном слое, решая численно транспортное уравнение.

Этап 5. На этом текущий цикл заканчивается. На последующих временных слоях алгоритм нахождения неизвестных будет иметь вид: в упругом скелете решаем уравнение Ламэ с граничным условием, найденным на Этапе 3, и условием Дирихле на границе области.

Описанный алгоритм справедлив в случае совместного движения жидкостей и упругого скелета на микроскопическом уровне, для фильтрации жидкостей в абсолютно твердом скелете алгоритм заметно упрощается в виду отсутствия упругой составляющей твердого тела. Для усредненных моделей алгоритм нахождения неизвестных тот же, за исключением полного отсутствия необходимости учитывать поведение упругого скелета.

Глава 4. Компьютерное моделирование микро-и макроскопических математических моделей фильтрации неоднородных жидкостей.

В данной главе рассматриваются особенности дискретизации как уравнений Стокса и Ламэ, так и полученных усредненных уравнений вязкоупругой фильтрации, записанных в физических переменных, на прямоугольной равномерной сетке с шахматным расположением узлов. Производится разработка программной системы решения задач вязкоупругой фильтрации в поровом пространстве.

На рисунке 1 представлены результаты численного усреднения моделей **MM1** и **MM2** для первой геометрии порового пространства.

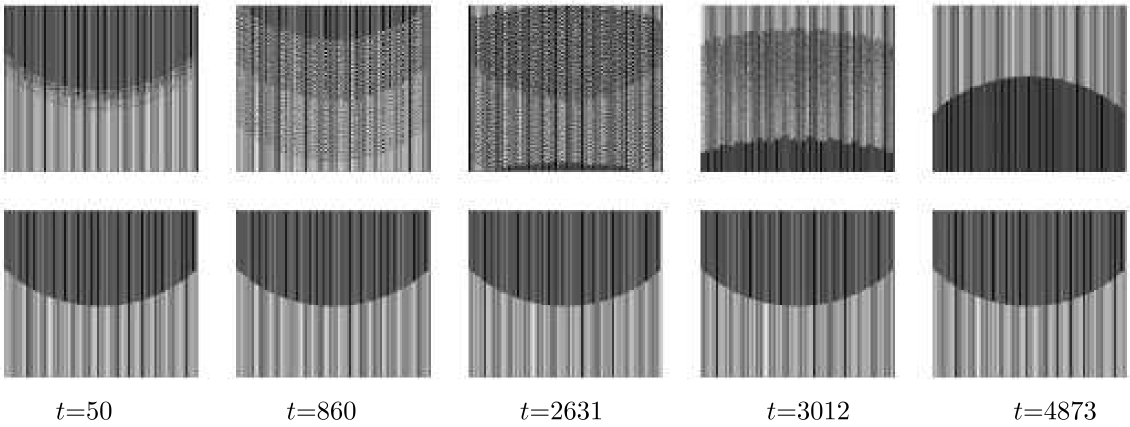


Рис. 1 Несвязные капилляры: абсолютно твердый скелет (сверху), упругий скелет (снизу).

Численное решение **ММ2** в одном капилляре показало совпадение с известными результатами[7]. На рисунке 2 можно увидеть гладкую свободную границу в капилляре в различные моменты времени.

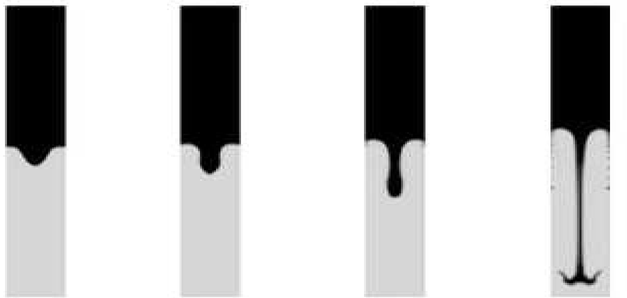


Рис. 2 Поверхность контактного разрыва в различные моменты времени.

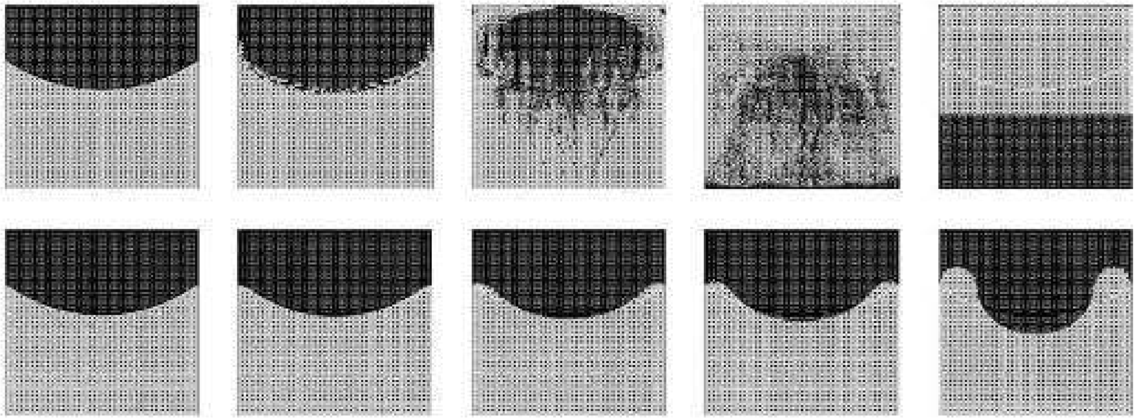
Очевидно, что для первой структуры достаточно определить решение системы уравнений в отдельно взятом капилляре (расчет неустойчивости Рэлея-Тейлора). Затем увеличивая количество капилляров ($\varepsilon \searrow 0$) мы численно определяем предельное ($\varepsilon = 0$) решение соответствующей усредненной модели **УММ2** (задачи Маскета).

Для второй геометрии порового пространства вычисления проводятся во всей области определения решения, что существенно увеличивает сложность вычислительного алгоритма.

Аналогичным образом проводится численное усреднение модели **ММ1**.

На рисунке 3 приведены сравнительные результаты для второй геометрии порового пространства.

[7] *Daly B. J.* Numerical study of two fluid Raylaigh-Taylor instability [Текст]// Phys. Fluids. – 1967. – №2. –pp. 297–307.

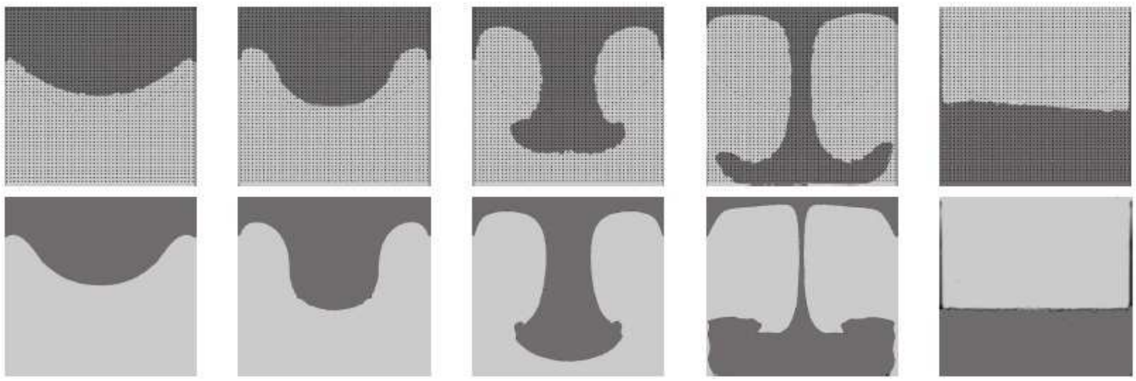


t=50 t=860 t=2631 t=3012 t=4873

Рис. 3 Несвязный скелет: абсолютно твердый скелет (сверху), упругий скелет (снизу).

При численном решении модели **УММ1** мы ограничились второй геометрией порового пространства (несвязные элементы упругого скелета).

На рисунке 4 представлены сравнительные результаты численного моделирования задачи **ММ1** и **УММ1**.



t=50 t=860 t=2631 t=3012 t=4873

Рис. 4 Сравнение результатов численного решения модели **УММ1** (снизу) и модели **ММ1** (сверху).

На основе численного решения этих задач можно сделать вывод, что движение жидкостей в упругом скелете (как на микроскопическом уровне, так и на макроскопическом уровне) происходит при наличии свободной границы. Решение системы вязкоупругой фильтрации – классическое и обладает гладкой и устойчивой свободной границей.

В тоже самое время решение задачи Маскета в лучшем случае будет только обобщенным с переходной фазой вместо свободной границы.

На основе численного решения этих задач можно сделать вывод, что движение жидкостей в упругом скелете (как на микроскопическом, так и на макроскопическом уровнях) происходит при наличии свободной границы. Решение системы вязкоупругой фильтрации – классическое и обладает гладкой и устойчивой свободной границей.

В тоже самое время решение задачи Маскета в лучшем случае будет только обобщенным с переходной фазой вместо свободной границы[8].

На рисунке 5 представлены результаты численного решения моделей **УММ3** и **УММ4**.

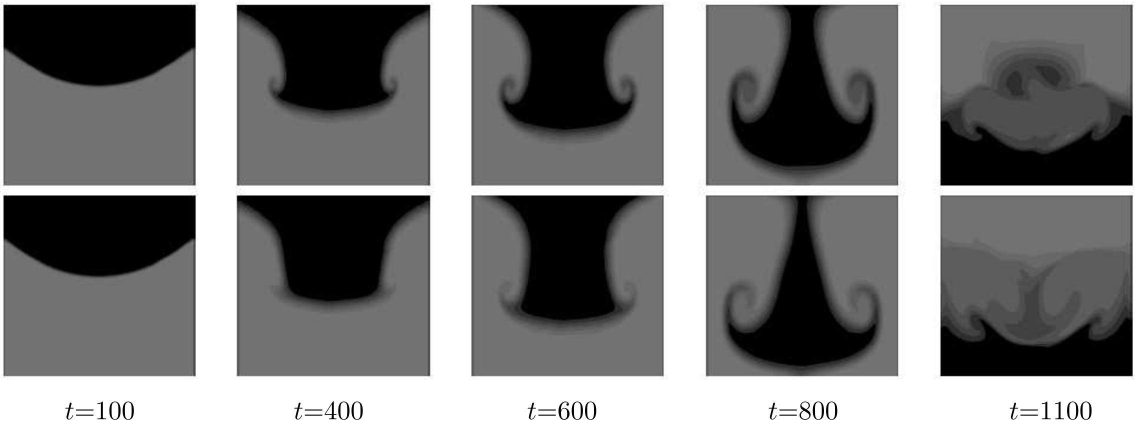


Рис. 5 Сравнительные результаты численного моделирования диффузионных моделей **УММ3** (сверху) и **УММ4** (снизу).

Численно было показано, что решение диффузионных моделей **УММ3** и **УММ4** при стремлении коэффициента диффузии D_0 стремится к решению модели **УММ1** (рисунок 6).

Отметим, что симметричная и строго положительно определенная матрица $\mathbb{B}^{(\rho)}$ будет диагональной в случае определенной симметрии порового пространства. Нетрудно видеть, что в этом случае в силу уравнения неразрывности (39), уравнения диффузии в **УММ3** и **УММ4** совпадают (рисунок 5).

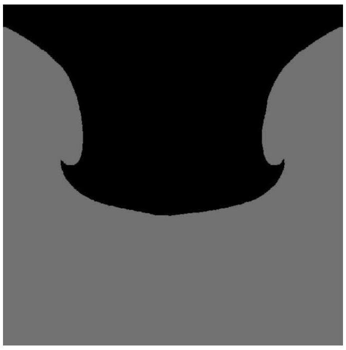
В силу выбранного нами метода решения задачи исследуемая область течения покрывается равномерной по x_1 и x_2 сеткой ячеек

$$\Omega_f = \begin{pmatrix} x_1^{(i+1/2)} = ih_1,\ h_1 > 0;\ i = 0, 1, ..., N_1; \\ x_2^{(j+1/2)} = jh_2,\ h_2 > 0;\ j = 0, 1, ..., N_2; \end{pmatrix}$$

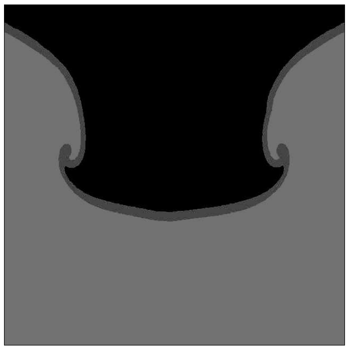
где h_1, h_2 – размер сетки, N_1, N_2 – количество ячеек сетки, соответственно, в направлении x_1 и x_2 (точка с координатами (i, j) совпадает с

[8] *Гальцев О. В., Мейрманов А. М.* Численное усреднение в задаче Рэлея-Тейлора при фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей [Текст]// Математическое моделирование. – 2011. –№23. –С.33 — 43.

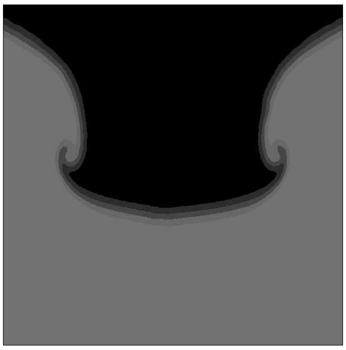
центром ячейки). Здесь, как и в исходном методе расщепления, будем использовать «шахматную» сетку. Это дает возможность четко интерпретировать каждую ячейку, как элемент объема, который характеризуется рассчитываемыми давлением и плотностью в его центре.



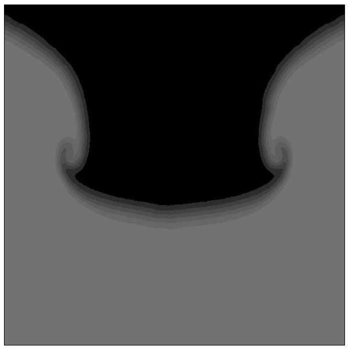
D_0=0



D_0=0.5



D_0=1.5



D_0=2

Рис. 6 Результаты численного решения модели **УММ3** при $D_0 \to 0$.

Конечно-разностные аналоги пространственных переменных для соответствующих производных, входящих в исходную систему уравнений, центрируются в соответствии с выбранным шаблоном.

Более полные выражения конечно-разностных аналогов соответствующих слагаемых двухмерных и трехмерных уравнений движения приведены, например, у О.М. Белоцерковского. Используемая конечно- разностная схема аппроксимирует рассматриваемые уравнения с первым порядком точности по времени и со вторым порядком точности по пространственным переменным $O(\Delta\tau, h^2)$ и можно показать, что она устойчива. Подставим конечно-разностные формулы в исходную систему уравнений движения. Тогда после простых преобразований получим их дискретные аналоги для x_1 и x_2 направлений соответственно.

Критерием окончания решения служит условие, когда максимальная относительная разность между значениями искомых переменных на предыдущем и следующем временном шаге не превышает заданную величину ошибки α

$$max\left|\frac{v^{n+1}-v^{n}}{v^{n+1}}\right| \leq \alpha.$$

На завершающем шаге (когда используется дискретная модель среды) следует проводить дополнительные (промежуточные) расчеты плотности, что сглаживает колебания и повышает точность вычислений. Комбинируя различные этапы, получаем ряд разностных схем, которые и составляют метод крупных частиц и метод объема жидкости в ячейке. При численном решении моделей **ММ1** – **ММ2**, **УММ1** целесообразно использовать метод объема жидкости в ячейке (Volume of Fluid метод), так как его реализация обеспечивает более точное отслеживание границы раздела фаз. Метод крупных частиц используется при моделировании задач **УММ3**–**УММ4**. Такой выбор обусловлен простотой отслеживания частиц каждой из жидкостей. Выбранные методы могут быть интерпретированы с различных точек зрения: метод расщепления, смешанный метод Эйлера-Лагранжа, вычисление в локальных лагранжевых координатах с масштабированием на предыдущей сетке, различные обозначения закона сохранения для жидкого элемента (большой частицы), Эйлерова разностная схема.

В Заключении кратко сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе.

В трех Приложениях приведены: описание основных классов и структур данных, реализованных в пакете прикладных программ, с фрагментами программной реализации на языке C++, описываются особенности программной реализации алгоритмов расчета уравнений на языке C++, результаты численных расчетов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ РАБОТЫ

1. Выведены новые микроскопические математические модели движения вязких несжимаемых жидкости различной вязкости в поровом пространстве.

2. Разработан алгоритм численного решения задач совместного движения вязких несжимаемых жидкостей на микроскопическом уровне.

3. Выведены новые макроскопические математические модели движения вязких несжимаемых жидкостей различной вязкости в поровом пространстве.

4. Разработан алгоритм численного решения задач совместного движения вязких несжимаемых жидкостей на макроскопическом уровне.

5. С использованием наиболее эффективных численных методов отслеживания поведения свободной границы раздела жидкостей разработана программная реализация созданных алгоритмов.

6. Доказана разрешимость диффузионных моделей фильтрации жидкостей в поровом пространстве.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору А. М. Мейрманову за постановку задач, поддержку и внимание к работе.

Основные публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК РФ

1. Гальцев О. В. Неустойчивость Рэлея-Тейлора в задаче Маскета со свободной границей [Текст] / О.В. Гальцев // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2012. – №5 (124). – Выпуск 26.

2. Гальцев О. В. Численное усреднение в задаче Рэлея-Тейлора при фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей [Текст] / О.В. Гальцев, А.М. Мейрманов // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 10.

3. Гальцев О. В. Математические модели диффузии в пороупругих средах [Текст] / О.В. Гальцев, А.М. Мейрманов, Р.Н. Зимин, О.А. Гальцева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2012. – №17 (136). – Выпуск 28.

4. Гальцев О. В. О разрешимости задачи диффузии-конвекции в пороупругой среде на микроскопическом уровне [Текст] / О.В. Гальцев, А.М. Мейрманов, Р.Н. Зимин, О.А. Гальцева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2012. – №11 (130). – Выпуск 27.

5. Гальцев О. В. Корректная разрешимость задачи о нелинейной диффузии в несжимаемой пороупругой среде на микроскопическом уровне

[Текст] / О.В. Гальцев, А.М. Мейрманов, Р.Н. Зимин, О.А. Гальцева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2012. – №5 (124). – Выпуск 26.

6. Гальцев О. В. О численном моделировании задачи Маскета со свободной границей [Текст] / О.В. Гальцев, О.А. Гальцева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2011. – №23 (94). – Выпуск 21.

7. Гальцев О. В. Сильфон, расчет перемещения границы потоков // [Текст] / О.В. Гальцев, А.М. Мейрманов, А.А. Копытов // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. - 2011. – №10 (105). – Выпуск 14.

8. Гальцев О. В. Гидропрепарирование как этиологический фактор атрофии альвеолярной кости [Текст] / О.В. Гальцев, А.А. Копытов // Парадонтология. – Т. 15.

Основные публикации в научных журналах и сборниках трудов научных конференций

9. Гальцев О.В. О численном моделировании неустойчивости Рэлея-Тейлора при фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей [Текст] / О.В. Гальцев // Современные методы теории краевых задач: сб. тр. Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXI», 20–24 апреля 2010, г. Воронеж. – Воронеж: изд. ВГУ, 2010. – С.66-67.

10. Гальцев О.В. О численном моделировании задачи Маскета со свободной границей [Текст] / О.В. Гальцев // сб. тр. Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, 2–7 июля 2010, г. Суздаль. – Суздаль: Коллектив авторов, 2010. – С. 56.

11. Гальцев О.В. Численное моделирование фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей (задача Маскета) [Текст] / О.В. Гальцев // Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики: сб. тр. Восьмой Междунар. конф., 25-30 июня 2010, г. Нальчик. – Нальчик: из. НИИ Прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 2010. – С. 36-38.

12. Гальцев О.В. Численное усреднение в задачах фильтрации со свободными границами [Текст] / О.В. Гальцев, А.М. Мейрманов // Диффе-

ренциальные уравнения и смежные темы: сб. тр. Междунар. конференции, 30 мая - 4 июня 2011, г. Москва: изд. МГУ, 2011. – С. 177-178.

13. Гальцев О.В. Неустойчивость Рэлея–Тейлора в теории фильтрации [Текст] / О.В. Гальцев, А.М. Мейрманов // Нелинейные волны: теория и новые приложения: сб. всерос. конф., 2-4 марта 2011, г. Новосибирск. – Новосибирск: ИГиЛ СО РАН, 2011. – С. 21-22.

Программы автора для ЭВМ

14. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2011615974 «Численное моделирование неустойчивости Рэлея-Тейлора в пороупругом пространстве («PorousFlow»)», Гальцев О.В.,Гальцева О.А., Мейрманов А.М., Заявка №2011614444, дата поступления 16 июня 2011 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 1 августа 2011 г.

Подписано в печать 20.07.2013. Гарнитура Times New Roman.
Формат 60 × 84/16. Усл. п. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ 291.
Оригинал-макет тиражирован в ИД «Белгород» НИУ «БелГУ»
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.